



**TUGAS MATA KULIAH
PENGELOLAAN SUMBER BELAJAR**

Dosen Pengampu : Dr. Djuniadi, M.Pd.

Bahan Ajar Teks

Satuan Pendidikan : SMA

Mata Pelajaran, Kelas : Matematika Kelas XI IPA

Pokok Bahasan : Lingkaran

Disusun oleh :

IMAN SUBEKTI – 0104510009

y_imansubekti@yahoo.com

Prodi KTP – PPs Unnes 2011

LINGKARAN

Standar Kompetensi :

- Menyusun dan menggunakan persamaan lingkaran dan garis singgungnya.

Kompetensi Dasar :

- Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan.
- Menggunakan persamaan lingkaran dalam berbagai pemecahan masalah.

Indikator

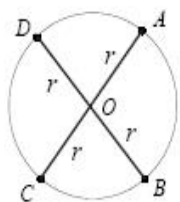
- Merumuskan persamaan lingkaran berpusat di $(0,0)$.
- Menentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya diketahui.
- Menentukan persamaan lingkaran yang diketahui pusat dan jari-jarinya.

Lihatlah benda-benda di sekitar kita. Dapatkah kamu menemukan benda-benda berbentuk lingkaran? Ternyata banyak sekali benda-benda berbentuk lingkaran, seperti roda kendaraan, CD, arloji, dan sebagainya.

Dalam bab ini, kita akan mempelajari lingkaran yang terkait dengan persamaan lingkaran dan garis singgungnya. Dengan mempelajarinya, kita akan dapat menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi syarat tertentu serta menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dengan berbagai situasi.

A. PERSAMAAN LINGKARAN

1. Pengertian Lingkaran



Lingkaran adalah tempat kedudukan atau himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Titik tertentu tersebut dinamakan pusat lingkaran dan jarak yang tetap tersebut dinamakan jari-jari lingkaran.

Dari gambar disamping, titik O adalah pusat lingkaran. Titik A , B , C , D terletak pada lingkaran, maka $OA = OB = OC = OD$ adalah jari-jari lingkaran $= r$.

2. Persamaan Lingkaran Berpusat di $O(0, 0)$ dan (a, b)

a. Persamaan Lingkaran dengan Pusat di $O(0, 0)$

Jika titik $A(x_A, y_A)$ terletak pada lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$, maka berlaku $OA =$ jari-jari lingkaran.

Dengan menggunakan rumus jarak titik $O(0, 0)$ ke titik $A(x_A, y_A)$ diperoleh:

$$OA = r = \sqrt{(x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2}$$

$$r^2 = (x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2$$

$$r^2 = x_A^2 + y_A^2$$

Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat $O(0, 0)$ dan berjari-jari r adalah:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Untuk lebih memahami tentang cara menentukan persamaan lingkaran berpusat di $O(0, 0)$, pelajarialah contoh soal berikut.

Contoh soal

Tentukan persamaan lingkaran, jika diketahui:

1. pusatnya $O(0, 0)$ dan berjari-jari 12
2. pusatnya $O(0, 0)$ dan melalui $(7, -24)$

1. Lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$ dan $r = 12$, maka persamaannya:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 12^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 144$$

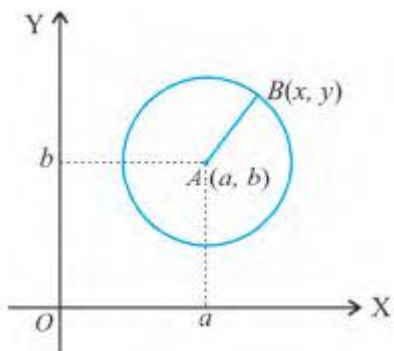
Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat di $O(0, 0)$ dan $r = 12$ adalah $x^2 + y^2 = 144$.

2. Lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$ dan melalui $(7, -24)$
Maka, jari-jari $r =$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{7^2 + (-24)^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$$

Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat di $O(0, 0)$ dan melalui $(7, -24)$ adalah $x^2 + y^2 = 625$.

b. Persamaan Lingkaran Berpusat di Titik $A(a, b)$



Jika titik $A(a, b)$ adalah pusat lingkaran dan titik $B(x, y)$ terletak pada lingkaran, maka jari-jari lingkaran r sama dengan jarak dari A ke B .

$$\begin{aligned} r &= \text{jarak } A \text{ ke } B \\ r^2 &= (AB)^2 \\ &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (x - a)^2 + (y - b)^2 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan lingkaran yang berpusat di (a, b) dan berjari-jari r adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Untuk memahami tentang persamaan lingkaran berpusat di titik $A(a, b)$, perhatikan contoh soal berikut.

Contoh soal

Tentukan persamaan lingkaran, jika diketahui:

1. pusatnya $(-2, 3)$ dan berjari-jari 5
2. pusatnya $(5, 2)$ dan melalui $(-4, 1)$
3. pusatnya $(4, 5)$ dan menyinggung sumbu X.

Penyelesaian

1. Pusat $(-2, 3)$, $r = 5$

$$\text{Persamaan lingkaran: } (x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 25$$

2. Pusat $(5, 2)$ dan melalui $(-4, 1)$

$$r = \sqrt{(5 - (-4))^2 + (2 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{(5 + 4)^2 + (2 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{9^2 + 1^2} = \sqrt{81 + 1} = \sqrt{82}$$

$$\text{Persamaan lingkaran: } (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{82})^2$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 82$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 29 = 82$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y - 53 = 0$$

3. Pusat $(4, 5)$ dan menyinggung sumbu $X \rightarrow$ jari-jari lingkaran $= 5$

$$\text{Persamaan lingkaran: } (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 41 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$$

3. Menentukan Pusat dan Jari-Jari Lingkaran yang Persamaannya Diketahui

Berdasarkan persamaan lingkaran dengan pusat (a, b) dan berjari-jari r adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Jika $-2a = 2A$, $-2b = 2B$ dan $a^2 + b^2 - r^2 = C$, maka diperoleh bentuk umum persamaan lingkaran:

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0, \text{ dimana pusatnya } (-A, -B) \text{ dan}$$
$$\text{jari-jari lingkaran } (r) = \sqrt{a^2 + b^2 - C^2} \text{ atau } r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$$

Untuk lebih memahaminya, pelajarilah contoh soal berikut ini.

Contoh soal 1

Tentukan koordinat pusat dan panjang jari-jari lingkaran apabila diketahui persamaan lingkaran sebagai berikut.

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

Maka diperoleh:

$$2A = -2 \quad 2B = -6 \quad C = -15$$

$$A = -1 \quad B = -3$$

$$r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 - (-15)}$$

$$= \sqrt{1+9+15} = \sqrt{25} = 5$$

Jadi, pusat lingkaran (1, 3) dan jari-jari lingkaran = 5.

Contoh soal 2

Tentukan koordinat pusat dan panjang jari-jari lingkaran apabila diketahui persamaan lingkaran sebagai berikut.

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 1\frac{1}{2}y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

Maka diperoleh:

$$2A = -2 \quad 2B = 1\frac{1}{2} \quad C = 0$$

$$A = -1 \quad B = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 0} \\ &= \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Jadi, pusat lingkaran $(1, -\frac{3}{4})$ dan jari-jari lingkaran = $\frac{5}{4}$.

Contoh soal 3

Tentukan koordinat pusat dan panjang jari-jari lingkaran apabila diketahui persamaan lingkaran sebagai berikut.

$$3x^2 + 3y^2 + 30x + 72 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 + 30x + 72 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 24 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

Maka diperoleh:

$$2A = 10 \quad 2B = 0 \quad C = 24$$

$$A = 5 \quad B = 0$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\ &= \sqrt{5^2 + 0^2 - 24} \\ &= \sqrt{25 - 24} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

Jadi, pusat lingkaran $(-5, 0)$ dan jari-jari lingkaran = 1.

Contoh soal 4

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik (3, -1), (5, 3), dan (6, 2) kemudian tentukan pula pusat dan jari-jari lingkaran.

Penyelesaian

Persamaan lingkaran adalah $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Melalui (3, -1) maka:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\3^2 + (-1)^2 + a \cdot 3 + b \cdot (-1) + c &= 0 \\9 + 1 + 3a - b + c &= 0 \\3a - b + c + 10 &= 0 \dots\dots (1)\end{aligned}$$

Melalui (5, 3), maka:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\5^2 + 3^2 + a \cdot 5 + b \cdot 3 + c &= 0 \\25 + 9 + 5a + 3b + c &= 0 \\5a + 3b + c + 34 &= 0 \dots\dots (2)\end{aligned}$$

Melalui (6, 2), maka:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\6^2 + 2^2 + 6a + 2b + c &= 0 \\36 + 4 + 6a + 2b + c &= 0 \\6a + 2b + c + 40 &= 0 \dots\dots (3)\end{aligned}$$

Next

Dari persamaan (1) dan (2):

$$\begin{aligned}3a - b + c + 10 &= 0 \\5a + 3b + c + 34 &= 0 \\-2a - 4b + 0 - 24 &= 0 \\a + 2b + 12 &= 0 \dots\dots(4)\end{aligned}$$

Dari persamaan (2) dan (3):

$$\begin{aligned}5a + 3b + c + 34 &= 0 \\6a + 2b + c + 40 &= 0 \\-a + b - 6 &= 0 \\a - b + 6 &= 0 \dots\dots(5)\end{aligned}$$

Dari persamaan (4) dan (5):

$$\begin{aligned}a + 2b + 12 &= 0 \\a - b + 6 &= 0 \\3b + 6 &= 0 \\b &= -2\end{aligned}$$

$b = -2$ disubstitusikan ke persamaan (5):

$$\begin{aligned}a - b + 6 &= 0 \\a + 2 + 6 &= 0 \\a + 8 &= 0 \\a &= -8\end{aligned}$$

$a = -8, b = -2$ disubstitusikan ke persamaan (1):

$$\begin{aligned}3a - b + c + 10 &= 0 \\3(-8) - (-2) + c + 10 &= 0 \\-24 + 2 + c + 10 &= 0 \\c &= 12\end{aligned}$$

Next

Jadi, persamaan lingkaran adalah:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 &= 0\end{aligned}$$

Maka diperoleh:

$$\begin{aligned}2A &= -8 & 2B &= -2 & C &= 12 \\A &= -4 & B &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\&= \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 - 12} \\&= \sqrt{16 + 1 - 12} = \sqrt{5}\end{aligned}$$

Jadi, pusat $(-A, -B) = (4, 1)$ dan jari-jari $r = \sqrt{5}$.

4. Kedudukan Titik dan Garis terhadap Lingkaran

a. Posisi Titik $P(x_1, y_1)$ terhadap Lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

1. Titik $P(x_1, y_1)$ terletak di dalam lingkaran, jika berlaku $x_1^2 + y_1^2 < r^2$.
2. Titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran, jika berlaku $x_1^2 + y_1^2 = r^2$.
3. Titik $P(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran, jika berlaku $x_1^2 + y_1^2 > r^2$.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh soal berikut.

Contoh soal

Tentukan posisi titik-titik berikut terhadap lingkaran

$$x^2 + y^2 = 25$$

1. $A(3, 1)$
2. $B(-3, 4)$
3. $C(5, -6)$

Penyelesaian

$$1. \quad A(3, 1) \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 \\ = 10 < 25$$

Jadi, $A(3, 1)$ terletak di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 25$.

$$2. \quad B(-3, 4) \Rightarrow x^2 + y^2 = (-3)^2 + 4^2 = 9 + 16 \\ = 25 = 25$$

Jadi, $B(-3, 4)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$.

$$3. \quad C(5, -6) \Rightarrow x^2 + y^2 = 5^2 + (-6)^2 = 25 + 36 \\ = 61 > 25$$

Jadi, $C(5, -6)$ terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 25$.

b. Posisi Titik $P(x_1, y_1)$ terhadap Lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

1. Titik $P(x_1, y_1)$ terletak di dalam lingkaran, jika berlaku $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$.
2. Titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran, jika berlaku $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$.
3. Titik $P(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran, jika berlaku $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh soal berikut.

Contoh soal

Tentukan posisi titik-titik berikut terhadap lingkaran

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

1. $A(0,0)$ 2. $B(2,1)$ 3. $C(3,-2)$

Penyelesaian

$$1. \quad A(0,0) \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0^2 + 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 \\ = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Jadi, $A(0,0)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

$$2. \quad B(2,1) \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 8y = 2^2 + 1^2 - 6 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \\ = 4 + 1 - 12 + 8 = 1 > 0$$

Jadi, $B(2,1)$ terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

$$3. \quad C(3,-2) \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 8y = 3^2 + (-2)^2 - 6 \cdot 3 + 8 \cdot (-2) \\ = 9 + 4 - 18 - 16 = -21 < 0$$

Jadi, $C(3,-2)$ terletak didalam lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

c. Posisi Garis $y = mx + n$ terhadap Suatu Lingkaran

Jika persamaan garis $y = mx + n$ didistribusikan ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ diperoleh persamaan:

$$x^2 + (mx + n)^2 + 2Ax + 2B(mx + n) + C = 0 \\ x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 + 2Ax + 2Bmx + 2Bn + C = 0 \\ (1 + m^2)x^2 + (2mn + 2A + 2Bm)x + (n^2 + 2Bn + C) = 0 \\ D = (2mn + 2A + 2Bm)^2 - 4(1 + m^2)(n^2 + 2Bn + C) = 0$$

1. $A(6, -8)$ disubstitusikan ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ diperoleh $6^2 + (-8)^2 = 36 + 64 = 100$
Jadi, $A(6, -8)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$
2. $A(6, -8)$ disubstitusikan ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$ diperoleh
 $6^2 + (-8)^2 - 6 \cdot 6 + 8(-8) + 25 = 36 + 64 - 36 - 64 + 25 = 25 > 0$
Jadi, $A(6, -8)$ terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 100$
3. $A(6, -8)$ disubstitusikan ke persamaan lingkaran $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 64$ diperoleh:
 $(6-1)^2 + (-8+2)^2 = 5^2 + (-6)^2 = 25 + 36 = 61 < 64$
Jadi, $A(6, -8)$ terletak di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 100$

Contoh soal 2

Tentukan posisi garis $x - y + 1 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 25$. Jika berpotongan, tentukan titik potongnya!

Penyelesaian

$$x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1 \dots (1)$$

$$x^2 + y^2 = 25 \dots (2)$$

Dari persamaan (1) disubstitusikan ke persamaan (2):

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 25 & D &= b^2 - 4ac \\x^2 + (x+1)^2 &= 25 & &= 1^2 - 4.1(-12) \\x^2 + x^2 + 2x + 1 &= 25 & &= 1 + 48 \\x^2 + x^2 + 2x + 1 - 25 &= 0 & &= 49 > 0\end{aligned}$$

Ternyata $D > 0$, sehingga garis $x - y + 1$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ di dua titik yang berbeda. Titik-titik potongnya adalah:

$$\begin{aligned}x^2 + x - 12 &= 0 \\(x+4)(x-3) &= 0 \\x+4 &= 0 & \text{atau} & & x-3 &= 0 \\x &= -4 & \text{atau} & & x &= 3\end{aligned}$$

Untuk $x = -4$ disubstitusikan ke persamaan:

$$\begin{aligned}y = x + 1 &= -4 + 1 \\&= -3 \Rightarrow (-4, -3)\end{aligned}$$

Untuk $x = 3$ disubstitusikan ke persamaan:

$$\begin{aligned}y = x + 1 &= 3 + 1 \\&= 4 \Rightarrow (3, 4)\end{aligned}$$

Jadi, titik potongnya adalah $(-4, -3)$ dan $(3, 4)$

Contoh soal 3

Tentukan posisi garis $2x - y + 1 = 0$ terhadap lingkaran

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0.$$

Penyelesaian

$$2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 1 \dots (1)$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0 \dots (2)$$

Dari persamaan (1) disubstitusikan ke persamaan (2):

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$$

$$x^2 + (2x + 1)^2 - 4x - 2(2x + 1) + 2 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - 4x - 4x - 2 + 2 = 0$$

$$5x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1$$

$$= 16 - 20$$

$$= -4 < 0$$

Ternyata $D < 0$, dengan demikian garis $2x - y + 1$ tidak memotong lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$.

y_imansubekti@yahoo.com

www.iman1808.wordpress.com

DAFTAR PUSTAKA

Tim Matematika SMA, 2004. Matematika 1 untuk SMA Kelas XI IPA, Jakarta : PT. Galaxy Puspa Mega.

Sartono Wirodikromo, 2006. Matematika untuk SMA Kelas XI IPA, Jakarta : Penerbit Erlangga.

Sukino, 2007. Matematika SMA Kelas XI, Jakarta : Penerbit Erlangga

MGMP Matematika Kota Semarang, 2007. LKS Matematika SMA / MA, Semarang : CV. Jabbaar Setia.

Muhammad Zainal Abidin Personal Blog SMAN 1 Bone-Bone Luwu Utara Sulsel
<http://meetabied.wordpress.com>

<http://matematikadisma.blogspot.com/2011>

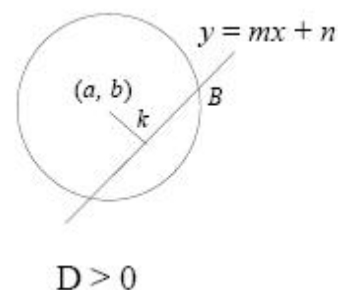
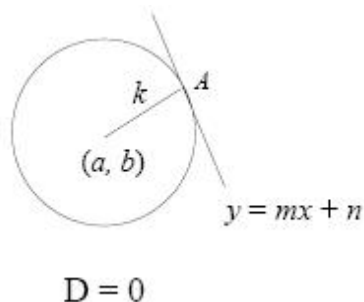
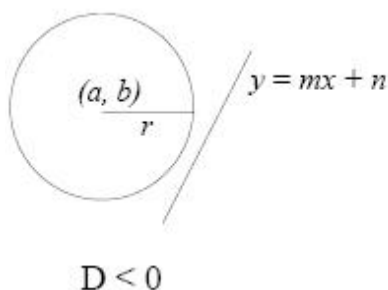
<http://bahanajarmatematika.xanga.com/>

<http://www.aeonity.com/mat-sma-x>

Maka ada tiga kemungkinan posisi garis terhadap suatu lingkaran, yaitu:

1. Jika $D < 0$, maka persamaan garis $y = mx + n$ terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, dan tidak memotong lingkaran ke garis lebih besar dari jari-jari lingkaran ($k > r$).
2. Jika $D = 0$, maka persamaan garis $y = mx + n$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, dan memotong lingkaran di satu titik atau jarak pusat lingkaran ke garis sama dengan jari-jari lingkaran ($k = r$).
3. Jika $D > 0$, maka persamaan garis $y = mx + n$ terletak di dalam lingkaran $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, dan memotong lingkaran di dua titik atau jarak pusat lingkaran ke garis lebih kecil dari jari-jari lingkaran ($k < r$).

Perhatikan gambar berikut!



Contoh soal 1

Tentukan posisi titik $A(6, -8)$ terhadap lingkaran:

1. $x^2 + y^2 = 100$

2. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$

3. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 64$

